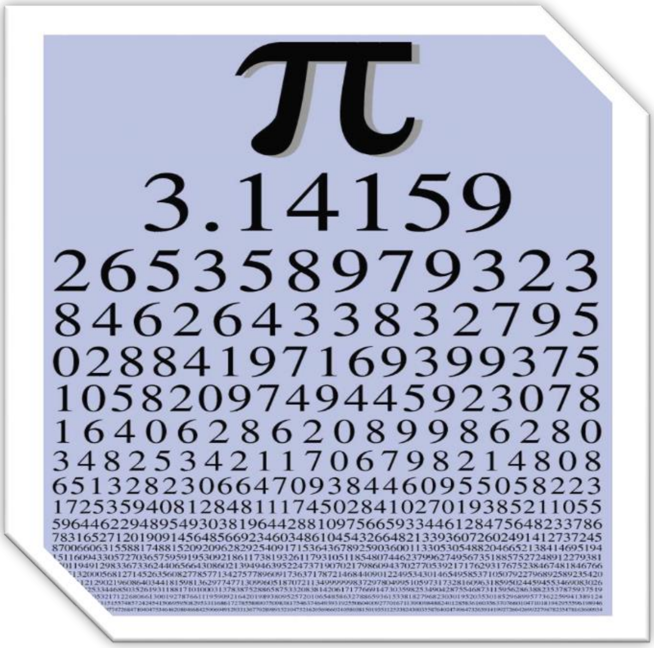
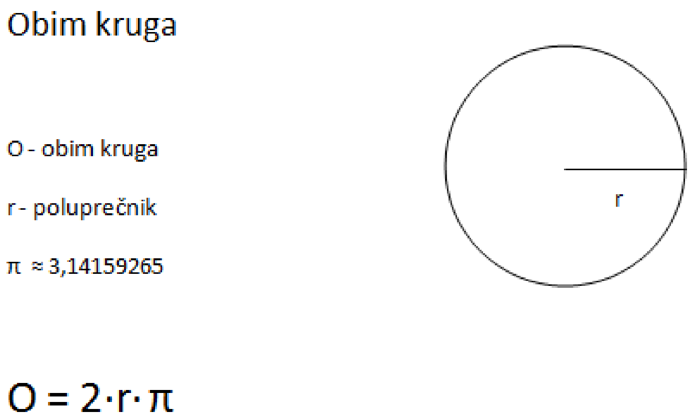
Broj π

Broj π poznat i kao Arhimedova konstanta i Ludolfov broj, jedna je od najbitnijih matematičkih konstanti. Vekovima p.n.e. pa do danas budi veliku zainteresovanost naučnika. Brojne su primene broja π u matematici, fizici, hemiji. Broj π se pojavljuje u mnogim formulama. Najpoznatije primene broja π imamo u formulama za obim i površinu kruga, zatim trigonometrijske formule, ugao od $\pi\, rad = 180°$ itd. Iako je za većinu praktičnih potreba dovoljno uzeti $\pi \approx 3{,}14$, vekovima su prisutni pokušaji da se vrednost ove konstante odredi sa što većom tačnošću. Kroz ovaj kratak članak osvrnućemo se na ove pomenute teme.



Slika 1.

Definicija 1. Odnos obima kruga i njegovog prečnika predstavlja broj π.



Slika 2.

Obim kruga jediničnog prečnika jednak je broju π.

Definicija 2. Odnos površine kruga i površine kvadrata konstruisanog nad njegovim poluprečnikom naziva se broj π.

$$\frac{P_{kruga}}{P_{kvadrata}} = \pi$$

Slika 3.

Definicija 3. Realan broj α nazivamo racionalnim ako se može zapisati u obliku razlomka $\frac{p}{q}$, gde je p ceo broj, a q je prirodan broj.

Definicija 4. Ukoliko realan broj nije racionalan za njega kažemo da je iracionalan.

Primeri nekih iracionalnih brojeva su: π, √ 2, √ 3…

Teorema 1. Broj π je iracionalan broj. (teoremu navodimo bez dokaza)

Iracionalnost broja π prvi je dokazao Johan Hajnrih Lambert[1] 1761. godine. Napredne dokaze dali su Ivan Niven[2], Šarl Ermit[3] i Meri Kartrajt[4].

Transcedentnost je svojstvo broja da ne može predstavljati koren polinoma s celobrojnim koeficijentima,

$$F(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0; \quad a_i \in Z, i = \overline{0, n}.$$

Transcendentan broj nije rešenje nijedne algebarske jednačine s celobrojnim koeficijentima,

$$F(x) = 0.$$

Transcendentni brojevi su podskup iracionalnih brojeva, a to znači da su svi transcendentni brojevi i iracionalni, ali nisu svi iracionalni transcendentni. Na primer, broj π jeste transcendentan dok je √ 2 iracionalan ali ne i transcendentan, jer je rešenje

[1] Švajcarski matematičar i fizičar (1728-1777)
[2] Kanadski matematičar (1915-1999)
[3] Francuski matematičar (1822-1901)
[4] Britanska matematičarka (1900-1998)

jednačine $x^2 - 2 = 0$. Brojevi koji nisu transcendentni se zovu algebarski.
Teorema 2. Broj π je transcendentan broj. (teoremu navodimo bez dokaza)

Poznata matematička konstanta, broj e takođe je transcendentan broj.

Dokaz za transcendentnost broja π izveo je 1882. godine nemački matematičar Karl Luis Ferdinand fon Lindeman (1852-1939). Karl Vilhelm Vajerštras (1815-1897), nemački matematičar, oko 1885. pojednostavio je Lindemanov dokaz, te je on poznat i kao Lindeman- Vajerštrasova teorema.

Ovim dokazom i Lambertovim dokazom o iracionalnosti stavljena je tačka na pitanje rešivosti kvadrature kruga. Posle nekoliko hiljada godina pokušabanja dokazano je da se taj problem ne može racionalno rešiti. Posledica transcendentnosti je da se π ne može izraziti korišćenjem konačnog broja celih brojeva uz četiri osnovne računske operacije, što još znači da nije moguće izvršiti kvadraturu kruga, tj. nemoguće je lenjirom i šestarom konstruisati kvadrat čija bi površina bila jednaka površini datog kruga.

Slika 4.

Izračunavanje vrednosti broja π kroz istoriju

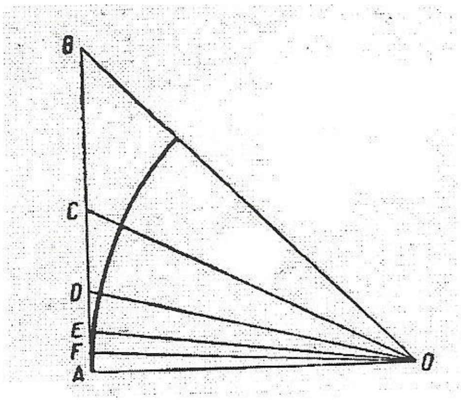
Istorija broja π i pokušaji da se odredi njegova tačnija vrednost, mogu se posmatrati objedinjeno. Broj π je vekovima p.n.e. bio predmet interesovanja mislilaca različitih civilizacija i do danas izaziva veliko interesovanje kako u naučnim krugovima tako i znatiželjnih pojedinaca.

Ovde ćemo navesti samo neke metode, geometrijske i analitičke za izračunavanje broja π.

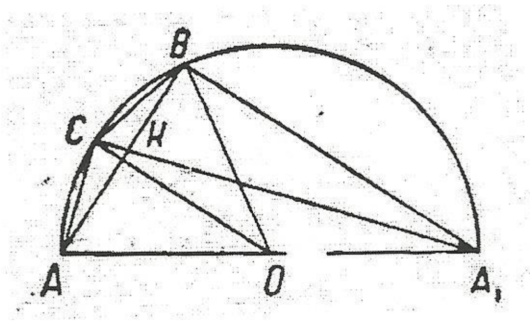
Arhimedov metod

Arhimed je oko 250. p. n. e. prvi u istoriji matematike odredio približnu vrednost broja π, a time i dužinu kružnice, iterativnim matematičkim metodom kojim se može proizvoljno približiti broju π. To je učinio tako što je određivao odnos poluobima upisanih i opisanih pravilnih n-touglova u/oko kružnice poluprečnika 1. Poluobim takve kružnice je π, upisani n-tougao ima manji, a opisani veći poluobim. Povećavanjem vrednosti n dobijaju se sve bolje aproksimacije broja π. Počevši od pravilnih šestouglova, polovljenjem uglova došao je do pravilnih upisanih i opisanih 96-uglova i zaključio da važi:

$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$, odnosno odredio je prve dve decimale broja π (3, 1408 < π < 3, 1429).



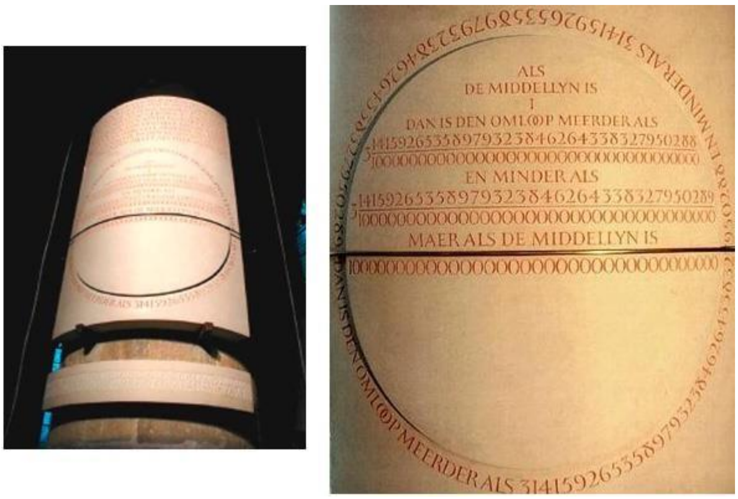
Slika 5. Opisani mnogouglovi



Slika 6. Upisani mnogouglovi

Arhimedova metoda je u osnovi mnogih geometrijskih metoda za određivanje vrednosti broja π sa većom preciznošću.

Ludolf van Cojlen bio je nemačko-holandski matematičar koji je živeo od 1540. do 1610. On je pred kraj života uspeo da, koristeći Arhimedov metod i pravilne mnogouglove sa oko 2^{62} strane, odredi prvih 35 decimala broja π i njihova vrednost prvi put je objavljena 1611. kad je urezana na njegov nadgrobni spomenik.



Slika 7. Ludolf Van Cojlen – nadgrobni spomenik sa natpisom o broju π

To je i aproksimacija koja je više nego dovoljna za sve praktične potrebe, čak i dan danas, i dalja poboljšanja imaju čisto teorijski značaj. Njemu u čast, broj π naziva se Ludolfov broj.

Računanje broja π analitičkim metodama bazira se na Vijetovoj[5] formuli za računanje broja π. On broj π predstavlja preko beskonačnog proizvoda:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2} \cdot \ldots$$

Kraće ovo možemo zapisati na sledeći način:

$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2} = \frac{\pi}{2}$, gde je niz $\{a_n\}$ zadat sa $a_1 = \sqrt{2}, a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$.

Proizvod konvergira ka $\frac{\pi}{2}$ linearno, što je brže od nekih drugih kasnijih metoda, ali su ubrzo pronadjeni nizovi i redovi koji računaju π brže.Čuveni nemački matematičar Gotfrid Vilhelm Lajbnic (1646-1716) dokazao je da važi sledeća aproksimacija za broj π:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

Ovo je specijalan slučaj reda Gregorija[6]

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{2i+1}$$

za x=1. Nedostatak ovog reda je spora konvergencija. Za tačno određivanje dve decimale, potrebno je 50 iteracija, a za tri, čak 300.

Međutim, ovaj red za različite vrednosti x, kasnije su iskoristili naučnici i dobili redove koji dosta brže konvergiraju. Ovom metodom za $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, izračunata je 71 decimala broja π. U ovom slučaju nakon šeste iteracije dobijaju se tačno tri decimale, a u dvanaestoj iteraciji, šest ispravnih decimala.

Džon Mejčin[7] je 1706. godine koristeći ovaj red i formulu

$$4arctg\frac{1}{5} - arctg\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4},$$

našao prvih 100 tačnih decimala broja π.

Moramo pomenuti i jednog od najvećih naučnika svih vremena, Isaka Njutna (1642-1727) . On se takođe bavio brojem π. Uspeo je da odredi tačno 15 prvih decimala broja π. Njegove formule za izračunavanje broja π, zasnivaju se na konvergenciji odgovarajućeg reda.

Leonard Ojler (1707-1783), jedan od najvećih matematičara svih vremena, dokazao je mnoge formule za izračunavanje broja π, a njegova najpoznatija formula, $e^{x\pi} + 1 = 0$ koristi se u dokazu transcendentnosti broja π.

Sa značajnim razvojem računarske tehnologije 1950-ih godina, broj π je izračunat na hiljade, a zatim milione decimala. Ove proračune je značajno olakšalo otkriće naprednih algoritama za

[5] Fransoa Vijet, francuski matematičar (1540 – 1603)

[6] Džejms Gregori (1638-1675), škotski matematičar i astronom

[7] Engleski matematičar (1680-1752)

izvođnje osnovnih aritmetičkih operacija sa visokom preciznošću. U današnje vreme dostižu se rekordi u izračunavanju decimala broja π koji se mere trilionima.

Pokušajte samostalno!

U daljem tekstu, objašnjene su dve zanimljive metode koje se mogu koristiti za izračunavanje broja π, a ove „eksperimente“ možemo i samostalno realizovati.

Metoda Monte Karlo je statistička metoda za simulaciju podataka kojom se mogu obavljati različite vrste proračuna. Jedan od načina za izračunavanje broja π ovom metodom može se opisati na sledeći način:

U kvadrat se upiše krug. Neka je d prečnik kruga, odnosno stranica kvadrata.

$$P_{kruga} = \frac{d^2}{4}\pi$$
$$P_{kvadrata} = d^2$$

Bacamo na kvadrat n novčića, nasumično, jedan po jedan. Neka se k novčića nađe u krugu. Tada važi:

$k{:}\,n = P_{kruga}{:}\,P_{kvadrata} = \frac{\pi}{4}$, pa se dobija da je $\pi \approx \frac{4k}{n}$. Što se više bacanja izvrši, veća je verovatnoća da se dobijeni rezultat nađe u intervalu $[\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon]$, za neku izabranu malu vrednost ε.

Za računarsku simulaciju može se koristiti četvrtina jediničnog kruga. Bacanje novčića se simulira generisanjem slučajnih brojeva a i b iz intervala $[0,1]$ koji predstavljaju koordinate tačaka.

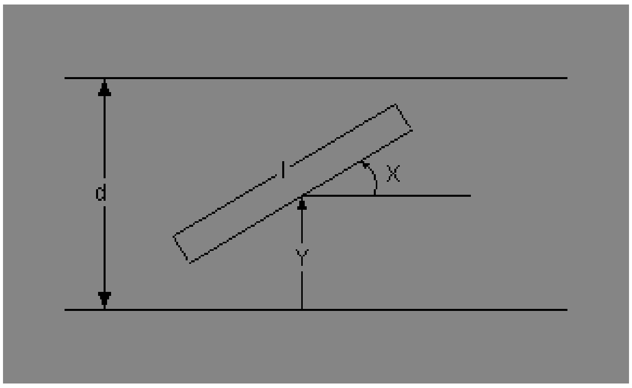
Veličina $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ predstavlja udaljenost tačke od koordinatnog početka. Ukoliko $d < 1$, računa se da je novčić upao u krug.

Na sledećem linku može se pogledati jedna takva simulacija: Monte Karlo simulacija Pi .

Bifonov eksperiment nam daje mogućnost procene broja π. Naime, ako se igla dužine (l) baca veliki broj puta (n) na ravan podeljenu paralelnim pravama na rastojanju (d) i ako (m) puta preseče neku pravu, tada se, prema statističkoj definiciji verovatnoće može uzeti da je verovatnoća preseka igle sa nekom pravom približno jednaka $\frac{m}{n}$.

Tada se vrednost broja π može izraziti : $\pi \approx \frac{2ln}{dm}$.

Do ove vrednosti za broj π dolazi se na sledeći način:



Slika 8.

Zbog početnog uslova (l < d) igla ne može da seče više od jedne prave, pa je dovoljno posmatrati položaj u odnosu na najbližu pravu. U odnosu na ovu pravu položaj igle je u potpunosti odeređen dvema slučajnim veličinama:

X- ugao igle u odnosu na pravu meren u smeru suprotnom od smera kretanja kazaljke na satu

Y - rastojanje središta igle od prave

Za slučajne veličine definisane na ovaj način važi: $0 \leq X \leq \pi, 0 \leq Y \leq \frac{d}{2}$.

Prostor svih ishoda (X,Y) odgovara pravougaoniku:

$\prod = (X,Y) = \{(x, y): 0 \leq x \leq \pi\ , 0 \leq y \leq \frac{d}{2}\}$

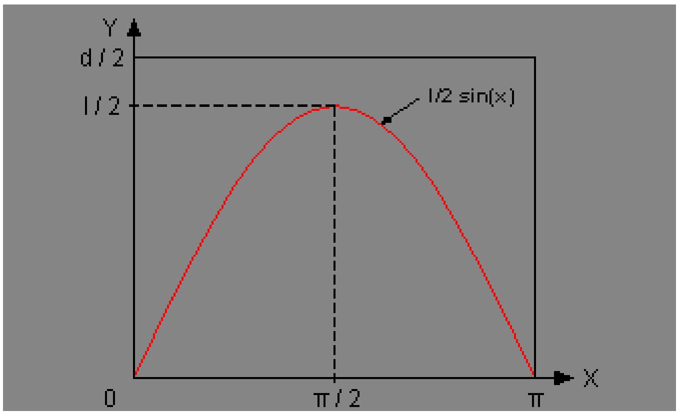
gde x, y predstavljaju realizovane vrednosti slučajnih veličina X i Y,respektivno. Ako koordinatu donjeg kraja igle napišemo u obliku $y - \frac{l}{2}\sin x$, zaključujemo da se presek javlja ukoliko je ova vrednost negativna, tj. ako važi $y \leq \frac{l}{2}\sin x$.

Kako se igla baca na slučajan način, možemo uzeti da je raspodela slučajne veličine X uniformna na intervalu [0,π], tako da je njena marginalna gustina raspodele verovatnoća:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}, 0 \leq x \leq \pi.$$

Analogno, možemo smatrati da slučajna veličina Y ima uniformnu raspodelu na intervalu [0,d/2], tako da je njena marginalna gustina raspodele verovatnoća data na sledeći način:

$$g(y) = \frac{2}{d}, 0 \leq y \leq \frac{d}{2}.$$



Slika 9.

Uočimo da poznavanje ugaone pozicije igle ne može da utiče na njeno rastojanje od prave i obratno. Stoga, slučajne veličine X i Y možemo smatrati nezavisnim, pa je njihova zajednička funkcija gustine raspodele verovatnoća jednaka proizvodu njima odgovarajućih marginalnih.

Da bi odredili verovatnoću preseka igle sa nekom od pravih moramo da integralimo prethodno utvrđenu zajedničku gustinu na prostoru povoljnih ishoda:

$$P = \int_0^{\pi} \frac{1}{\pi} dx \int_0^{l/2sinx} \frac{2}{d} dy = \frac{2}{\pi d} \int_0^{\pi} \frac{l}{2} \sin x\, dx = -\frac{l}{\pi d}(\cos \pi - \cos 0) =$$

$\frac{2l}{\pi d}$.

Kako je P, verovatnoća preseka igle sa nekom od pravih, jednaka m/n, zaključujemo da je

$$\pi \approx \frac{2ln}{dm}.$$

Ako uzmemo d=2l, dobijamo

$$\pi \approx \frac{n}{m}.$$

Bifonov eksperiment nije efikasan metod aproksimacije broja $\boldsymbol{\pi}$. Za procenu broja $\boldsymbol{\pi}$ na četiri decimale potrebno je oko 100 miliona bacanja.

Jedan sličan eksperiment, zasnovan na opisanom Bifonovom eksperimentu, jeste eksperiment sa šibicama: ravan (list papira) se podeli paralelnim linijama na rastojanju dva puta većem od dužine šibice , nasumično po listu papira prospemo šibice i približnu vrednost broja π određujemo kao količnik broja šibica koje su dodirnule bilo koju od linija i ukupnog broja šibica. Što je veći broj bačenih šibica to dobijamo tačniju aproksimaciju broja π.

Na linku OVDE možemo pogledati opisani eksperiment pa pokušati samostalno da izvedemo i nađemo približnu vrednost broja π.

Za kraj još jedna zanimljivost o broju π. Vaš datum rođenja nalazi se na nekoj poziciji u beskonačnom nizu decimala broja π. Možete proveriti na linku: https://mypiday.com/

Autor
Radmila Bošnjaković, master matematičar

Literatura:

[1] https://matematika.pmf.uns.ac.rs/wp-content/uploads/2023/05/renata-msc-krajnja.pdf

[2] https://www.mg.edu.rs/uploads/files/images/stories/dokumenta/maturski-2015/lazar-radosavljevic.pdf

[3] https://hrcak.srce.hr/file/177648

[4] https://poincare.matf.bg.ac.rs/~v_jevremovic/Buffon/bin/Buffon.html

[5]https://www.medias.rs/zanimljiva-matematika-pi